Propagation of chaos for a class of weakly interacting Snell envelopes

Boualem Djehiche¹ Roxana Dumitrescu² Jia Zeng²

¹KTH Royal Institute, Stockholm

²King's College London

9th International Colloquium on BSDEs Annecy, 1 July, 2022

Roxana Dumitrescu (King's College)

Propagation of chaos MF-RBSDEs

1 July 2022 1 / 46

Outline



Mean-field reflected BSDEs with jumps

- 3 Weakly interacting nonlinear Snell envelopes
- 4 Convergence of the particle system and propagation of chaos

Introduction

- (i) Classical reflected BSDEs: introduced by El Karoui et al. (1997) in the Brownian setting, further developments by many authors e.g. Essaky, Ouknine, Hamadène, Matoussi etc.
- (ii) Mean-field BSDEs: introduced by Buckdahn et al. (2009). Mean-field reflected BSDEs (Brownian setting): J. Li (2014)
- (iii) New type mean-field reflected BSDEs: introduced by Djehiche, Elie, Hamadène (2000) in the Brownian setting - new feature: dependence of the obstacle on the solution and its law

< □ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 >

Introduction

Aim:

- Prove existence and uniqueness of MF-BSDEs with jumps and obstacle which depends on the solution and its law, for general jumps by using a different approach compared with [DEH], which allows to weaken the assumptions (also in the Brownian setting)
- Wellposedness of the weakly interacting particle system of Snell envelopes
- Provide convergence and propagation of chaos results

(i) Mean-field BSDEs

A solution to a mean-field BSDE associated with $\{f(t, \omega, y, z, \nu), \xi\}$ (ν probability law on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d \times d}$) is a pair of $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ -adapted stochastic processes $(Y_t, Z_t)_{t \leq T}$ such that

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s, \mathbb{P}_{(Y_s, Z_s)}) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \ t \leq T.$$

Example:

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s, \mathbb{E}[Y_s], \mathbb{E}[Z_s]) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \ t \leq T.$$

They are studied first in the papers Buckdahn-Li-Peng (2009) and Buckdahn-Djehiche-Li-Peng (2009).

イロト 不得 トイラト イラト 一日

Theorem (Buckdahn-Li-Peng (2009))

If f is Lipschitz in (y, z, ν) and ξ is square integrable then the MF - BSDE has a unique solution.

Roxana Dumitrescu (King's College)

Propagation of chaos MF-RBSDEs

1 July 2022 6 / 46

(ii) Mean-field reflected BSDEs

A specific type of MF-RBSDEs appears in Briand-Elie-Hu (2018) where they consider

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s; \\ \mathbb{E}[I(t, Y_t)] \ge 0 \text{ and } \int_0^T \mathbb{E}[I(s, Y_s)] dK_s = 0. \end{cases}$$
(1)

Motivated by problems related to quantile hedging: instead of requiring a strong protection condition:

$$Y_t \geq L_t, \ t \leq T,$$

we only require a weak protection condition such as

$$\mathbb{P}[Y_t \geq L_t] \geq w_t,$$

i.e. the barrier is of the form $I(t, y) = \mathbf{1}_{\{y \ge L_t\}} - w_t$.

Theorem (Briand et al. (2018))

Assume

- (a) f is Lipschitz;
- (b) ξ square integrable and $\mathbb{E}[l(T,\xi)] \ge 0$;
- (c) (mainly) I is continuous, increasing with linear growth, bi-Lipschitz and $\mathbb{E}[I(t,\infty)] \ge 0$.

Then there exists a unique solution of (1) with K deterministic.

Remark. If we relax the fact that K is deterministic, then the solution is not necessarily unique.

Related works: Forward-Backward SDEs with constraints in law -Briand-Cardaliaguet- De Raynal - Hu (2020)

(4) (日本)

(ii) Mean-field reflected BSDEs

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, \mathbb{E}[Y_s]) ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s; \\ Y_t \ge h(Y_t, \mathbb{E}[Y_t]), \quad t \le T, \\ \int_0^T (Y_t - h(Y_t, \mathbb{E}[Y_t])) dK_t = 0. \end{cases}$$
(2)

This RBSDE has the same structure as the usual one (i.e. strong reflection), the new feature being that the barrier depends on the solution and its marginal law. This type of RBSDEs have been introduced by Djehiche-Elie-Hamadène (2020) in the Brownian filtration.

(ii) Mean-field reflected BSDEs

The component Y of the solution of the MF-RBSDE (2) admits the representation

$$Y_{t} = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \geq t} \mathbb{E}[\int_{t}^{\tau} f(s, Y_{s}, \mathbb{E}[Y_{s}]) ds + h(Y_{\tau}, \mathbb{E}[Y_{s}]|_{s=\tau}) \mathbf{1}_{\tau < \tau} + \xi \mathbf{1}_{\tau=\tau}].$$
(3)

< □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

(ii) Example: Guaranteed life endowment with a surrender/withdrawal option (Djehiche-Elie-Hamadène)

Consider a portfolio of a large number of *n* of homogenous life insurance policies *l*. Denote by $(Y^{l,n}, Z^{l,n})$ the characteristics of the prospective reserve of each policy l = 1, 2, ..., n. We consider nonlinear reserving where the driver *f* depends on the reserve for the particular contract and on the average reserve characteristics over the *n* contracts: For each l = 1, 2, ..., n,

$$Y_{t}^{l,n} = ess \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t}} \mathbb{E}[\int_{t}^{\tau} f(s, Y_{s}^{l,n}, (Y_{s}^{m,n})_{m \neq l}) ds + h(Y_{\tau}^{l,n}, Y_{\tau}^{m,n})_{m \neq l}) \mathbf{1}_{\tau < \tau} + \xi^{l,n}$$
(4)

- ロ ト - (周 ト - (日 ト - (日 ト -)日

(ii) Example: Guaranteed life endowment with a surrender/withdrawal option (Djehiche-Elie-Hamadène)

•
$$f(t, Y_t^{l,n}, (Y_t^{m,n})_{m \neq l}) := \alpha_t - \delta_t Y_t^{l,n} + \beta_t \max(\theta_t, Y_t^{l,n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_t^{k,n});$$

• $L_t := h(Y_t^{l,n}, Y_t^{m,n})_{m \neq l} = u - c(Y_t^{l,n}) + \mu(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_t^{k,n} - u)^+,$ where $0 < \mu < 1.$

Sending n to infinity 'yields' the following forms of the driver and the obstacle:

$$f(t, Y_t, \mathbb{E}[Y_t]) := \alpha_t - \delta_t Y_t + \beta_t \max(\theta, Y_t - \mathbb{E}[Y_t]);$$

$$h(t, Y_t, \mathbb{E}[Y_t]) = u - c(Y_t) + \mu(\mathbb{E}[Y_t] - u)^+,$$

of the prospective reserve of a representative life insurance contract, a.k.a. the model-point among actuaries.

Roxana Dumitrescu (King's College)

Outline



2 Mean-field reflected BSDEs with jumps

- 3 Weakly interacting nonlinear Snell envelopes
- 4 Convergence of the particle system and propagation of chaos

< □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Spaces

(i) On the complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ we consider

- $B = (B_t)_{0 \le t \le T}$ is a standard one dimensional Brownian motion
- N(dt, de) is a Poisson random measure, independent of B, with compensator $\nu(de)dt$ where ν is a σ -finite measure on $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} 0$.
- $\tilde{N}(dt, de)$ is its compensated process.
- $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ the (completed) natural filtration associated with *B* and *N*. Let \mathcal{P} be the σ -algebra on $\Omega \times [0, T]$ of \mathcal{F}_t -progressively measurable sets.
- (ii) L^p(F_T) is the set of random variables ξ which are F_T-measurable and E[|ξ|^p] < ∞.
- (iii) S^{p}_{β} is the set of real-valued càdlàg adapted processes y such that $||y||^{p}_{S^{p}_{\beta}} := \mathbb{E}[\sup_{0 \le u \le T} e^{\beta p u} |y_{u}|^{p}] < \infty$. We set $S^{p} = S^{p}_{0}$.

Spaces

- (iv) $S^{p}_{\beta,i}$ is the subset of S^{p}_{β} such that the process k is non-decreasing and $k_{0} = 0$. We set $S^{p}_{i} = S^{p}_{0,i}$.
- (v) $\mathcal{H}^{p,d}$ is the set of \mathcal{P} -measurable, \mathbb{R}^d -valued processes such that $\mathbb{E}[(\int_0^T |v_s|^2 ds)^{p/2}] < \infty.$
- (vi) L^p_{ν} is the set of measurable functions $I : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ such that $\int_{\mathbb{R}^*} |I(u)|^p \nu(du) < +\infty$. The set L^2_{ν} is a Hilbert space equipped with the scalar product $\langle \delta, I \rangle_{\nu} := \int_{\mathbb{R}^*} \delta(u)I(u)\nu(du)$ for all $(\delta, I) \in L^2_{\nu} \times L^2_{\nu}$, and the norm $|I|_{\nu,2} := (\int_{\mathbb{R}^*} |I(u)|^2 \nu(du))^{1/2}$.

- ロ ト - (周 ト - (日 ト - (日 ト -)日

Spaces

(vii) $\mathcal{H}^{p,d}_{\nu}$ is the set of predictable processes *I*, i.e. measurable

$$I:([0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^*,\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^*))\to(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d));\quad(\omega,t,u)\mapsto I_t(\omega,u)$$

such that
$$\|I\|_{\mathcal{H}^{p,d}_{\nu}}^{p} := \mathbb{E}\left[\left(\int_{0}^{T} \sum_{j=1}^{d} |I_{t}^{j}|_{\nu}^{2} dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] < \infty$$
. For $d = 1$, we denote $\mathcal{H}^{p,1}_{\nu} := \mathcal{H}^{p}_{\nu}$.

(viii) $\mathcal{P}_p(\mathbb{R})$ is the set of probability measures on \mathbb{R} with finite *p*th moment. We equip the space $\mathcal{P}_p(\mathbb{R})$ with the *p*-Wasserstein distance denoted by \mathcal{W}_p and defined as

$$\mathcal{W}_p(\mu,
u) := \inf\left\{\int_{\mathbb{R} imes\mathbb{R}} |x-y|^p \pi(dx,dy)
ight\}^{1/p},$$

where the infimum is over probability measures $\pi \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ with first and second marginals μ and ν , respectively.

Definition

We say that the quadruple of processes $(Y_t, Z_t, U_t, K_t)_{t \leq T}$ is a solution of the mean-field reflected BSDE associated with (f, ξ, h) if

$$\begin{cases} Y \in \mathcal{S}^{p}, Z \in \mathcal{H}^{p,1}, U \in \mathcal{H}^{p}_{\nu} \text{ and } K \in \mathcal{S}^{p}_{i} \text{ and predictable,} \\ Y_{t} = \xi + \int_{t}^{T} f(s, Y_{s}, Z_{s}, U_{s}, \mathbb{P}_{Y_{s}}) ds + K_{T} - K_{t} - \int_{t}^{T} Z_{s} dB_{s} - \int_{t}^{T} \int_{R^{*}} U_{s}(e) \\ Y_{t} \ge h(t, Y_{t}, \mathbb{P}_{Y_{t}}), \ t \in [0, T], \\ \int_{0}^{T} (Y_{t^{-}} - h(t^{-}, Y_{t^{-}}, \mathbb{P}_{Y_{t^{-}}})) dK_{t} = 0 \qquad (\text{Skorohod's flatness condition}) \end{cases}$$

$$(5)$$

Assumptions

The coefficients f, h and ξ satisfy

- (i) f is a mapping from $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times L^p_{\nu} \times \mathcal{P}_p(\mathbb{R})$ into \mathbb{R} such that
 - (a) the process $(f(t, 0, 0, 0, \delta_0))_{t \leq T}$ is \mathcal{P} -measurable and belongs to $\mathcal{H}^{p,1}$;
 - (b) f is Lipschitz w.r.t. (y, z, u, μ) uniformly in (t, ω) , i.e. there exists a positive constant C_f such that \mathbb{P} -a.s. for all $t \in [0, T]$,

 $\begin{aligned} |f(t, y_1, z_1, u_1, \mu_1) - f(t, y_2, z_2, u_2, \mu_2)| &\leq C_f(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \\ &+ |u_1 - u_2|_{\nu} + \mathcal{W}_p(\mu_1, \mu_2)) \end{aligned}$

for any $y_1, y_2 \in \mathbb{R}, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in L^p_{\nu}$ and $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R})$.

・ロト ・ 母 ト ・ ヨ ト ・ ヨ ト … ヨ

Assumptions

(i) f also satisfies (c) Assume that $d\mathbb{P} \otimes dt$ a.e. for each $(y, z, u_1, u_2, \mu) \in \mathbb{R}$)² × $(L^2_{\nu})^2 \times \mathcal{P}_p(\mathbb{R})$), $f(t, y, z, u_1, \mu) - f(t, y, z, u_2, \mu) \ge \langle \gamma_t^{y, z, u_1, u_2, \mu}, l_1 - l_2 \rangle_{\nu}$, with

$$\begin{split} \gamma : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R})^2 \times (L^2_{\nu})^2 \times \mathcal{P}_p(\mathbb{R})) &\mapsto L^2_{\nu}; \\ (\omega, t, y, z, u_1, u_2, \mu) &\mapsto \gamma^{y, z, u_1, u_2, \mu}_t(\omega, \cdot) \end{split}$$

 $\begin{array}{l} \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathcal{B}((L^2_{\nu})^2) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{P}_p(\mathbb{R})) \text{ measurable satisfying} \\ \|\gamma_t^{y,z,u_1,u_2,\mu}(\cdot)\|_{\nu} \leq C \text{ for all} \\ (y,z,u_1,u_2,\mu) \in \mathbb{R}^2 \times (L^2_{\nu})^2 \times \mathcal{P}_p(\mathbb{R}), \ d\mathbb{P} \otimes dt \text{-a.e., where } C \text{ is a} \\ \text{positive constant, and such that } \gamma_t^{y,z,u_1,u_2,\mu}(e) \geq -1, \text{ for all} \\ (y,z,u_1,u_2,\mu) \in \mathbb{R}^2 \times (L^2_{\nu})^2 \times \mathcal{P}_p(\mathbb{R}), \ d\mathbb{P} \otimes dt \otimes d\nu(e) \text{-a.e.} \end{array}$

Assumptions

- (ii) *h* is a mapping from $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathcal{P}_{p}(\mathbb{R})$ into \mathbb{R} such that
 - (a) For all $(y, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}_{p}(\mathbb{R})$, $(h(t, y, \mu))_{t}$ is a right-continuous left-limited process;
 - (b) the process $\left(\sup_{(y,\mu)\in\mathbb{R}\times\mathcal{P}_{\rho}(\mathbb{R})}|h(t,y,\mu)|\right)_{0\leq t\leq T}$ belongs to \mathcal{S}^{ρ} ;
 - (c) *h* is Lipschitz w.r.t. (y, μ) uniformly in $(t, \overline{\omega})$, i.e. there exists two positive constants γ_1 and γ_2 such that \mathbb{P} -a.s. for all $t \in [0, T]$,

 $|h(t, y_1, \mu_1) - h(t, y_2, \mu_2)| \le \gamma_1 |y_1 - y_2| + \gamma_2 \mathcal{W}_p(\mu_1, \mu_2)$

for any $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ and $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R})$. (iii) $\xi \in L^p(\mathcal{F}_T)$ and satisfies $\xi \ge h(T, \xi, \mathbb{P}_{\xi})$.

Existence and uniqueness result

Theorem

Suppose that above Assumption is in force for some $p\geq 2.$ Assume that γ_1 and γ_2 satisfy

$$\gamma_1^{p} + \gamma_2^{p} < 2^{2 - \frac{3p}{2}}.$$
 (6)

Then the system (5) has a unique solution in $S^p \times \mathcal{H}^{p,1} \times \mathcal{H}^p_{\nu} \times S^p_i$.

Remark: An existence and uniqueness result has been obtained in Djehiche-Elie-Hamadene (in the case of a Brownian filtration) under a different condition and using a penalization scheme technique which imposes two extra conditions: 'a domination condition' on f and monotonicy conditions on f, h.

Existence and uniqueness result

Our proof of solvability of MF-RBSDEs is based on the connection between *nonlinear reflected BSDEs* and *optimal stopping with nonlinear expectations*.

• Given a Lipschitz driver $g(t, \omega, y, z, u)$ and a terminal condition $\xi \in L^p(\mathcal{F}_T)$ there exists a unique solution $(X^g(\xi, T), \pi^g(\xi, T), \theta^g(\xi, T)) \in S^p \times \mathcal{H}^{p,m} \times \mathcal{H}^p_{\nu}$ satisfying

$$X_t^g = \xi + \int_t^T g(s, X_s^g, \pi_s^g, \theta_s^g) ds - \int_t^T \pi_s^g dB_s - \int_t^T \int_{\mathbb{R}^*} \theta_s^g(e) \tilde{N}(ds, de)$$
(7)

Roxana Dumitrescu (King's College)

(人間) トイヨト イヨト ニヨ

Existence and uniqueness result

- Define the nonlinear operator $\mathcal{E}_{t,T}^{g}[\xi] := X_{t}^{g}(\xi, T)$.
- We have the following 'semigroup property': for any stopping time $\tau \in \mathcal{T}_{\mathbf{f}},$

$$\mathcal{E}_{t,T}^{g}[\xi] := \mathcal{E}_{t,\tau}^{g}[\mathcal{E}_{\tau,T}^{g}[\xi]]$$

< □ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 >

Existence and uniqueness result

Recall that the solution to the reflected BSDE associated with $\{g(t, \omega, y, z, u), \xi, (L_t)_{t \leq T}\}$ and the RCLL obstacle (S_t) is a triple of $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ - adapted stochastic processes $(Y_t, Z_t, U_t, K_t)_{t \leq T}$ such that, for all $t \leq T$,

$$\begin{cases}
Y_{t} = \xi + \int_{t}^{T} g(s, Y_{s}, Z_{s}, U_{s}) ds + K_{T} - K_{t} - \int_{t}^{T} Z_{s} dB_{s} \\
- \int_{t}^{T} \int_{\mathbb{R}^{*}} U_{s}(e) \tilde{N}(ds, de), \\
Y_{t} \ge L_{t}, \ \xi \ge L_{T}; \\
\int_{0}^{T} (Y_{s^{-}} - L_{s^{-}}) dK_{s} = 0.
\end{cases}$$
(8)

Roxana Dumitrescu (King's College)

Existence and uniqueness result

Theorem

Let $(Y, Z, U, K) \in S^p \times \mathcal{H}^d \times \mathcal{H}^d_\nu \times S^p_i$ be the unique solution of the reflected BSDE (8). Then

$$Y_t = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathcal{E}^g_{t,\tau}[\phi_\tau], \ t \le \tau \le T, \ a.s.$$
(9)

and

$$\phi_{\tau} := L_{\tau} \mathbf{1}_{\tau < T} + \xi \mathbf{1}_{\tau = T}.$$

Note that the representation (9) is different from:

$$Y_t = ess \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}[\int_t^{\tau} f(s, Y_s, Z_s) ds + \phi_{\tau} \mathbf{1}_{\tau < \tau} + \xi \mathbf{1}_{\tau = \tau}].$$

- 4 回 ト 4 ヨ ト 4 ヨ ト

Existence and uniqueness result

Approach

Exploit the nonlinear optimal stopping representation and consider the map $\widehat{\phi} : \mathbb{S}^p \mapsto \mathbb{S}^p$ which associates to a process $Y \in \mathbb{S}^p$ another process $\widehat{\Phi}(Y)$ defined by:

$$\widehat{\Phi}(Y)_t := \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathcal{E}_{t,\tau}^{f \circ Y} \left[h(\tau, Y_{\tau}, \mathbb{P}_{Y_s | s = \tau}) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} + \xi \mathbf{1}_{\{\tau = T\}} \right],$$

where $(f \circ Y)(t, y, z, u) = f(t, y, z, u, \mathbb{P}_{Y_t})$. By using a priori estimates with universal constants, we show that existence of a fixed point on $[T - \delta, T]$ for some $\delta > 0$ and then obtain the existence and uniqueness on [0, T].

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ □ ののの

Complementary results

Definition

A progressive process (ϕ_t) is called *left-upper semicontinuous (in short l.u.s.c)* along stopping times if for all $\tau \in \mathcal{T}_0$ and for each non-decreasing sequence of stopping times (τ_n) such that $\tau_n \uparrow \tau$ a.s., $\phi_{\tau} \geq \limsup_{n \to \infty} \phi_{\tau_n}$ a.s.

Roxana Dumitrescu (King's College)

Propagation of chaos MF-RBSDEs

1 July 2022 27 / 46

Complementary results

Theorem (Sufficient condition - continuity of the increasing process)

Suppose that γ_1 and γ_2 satisfy the condition (6). Assume that h takes the form $h(t, \omega, y, \mu) := \xi_t(\omega) + \kappa(y, \mu)$, where ξ belongs to S^p and is a left upper semicontinuous process along stopping times, and κ is a bounded and Lipschitz function with respect to (y, μ) . Let (Y, Z, U, K) be the unique solution of the mean-field reflected BSDE (5). Then (Y_t) has jumps only at totally inaccessible stopping times (i.e. the predictable process (K_t) is continuous).

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Outline



Mean-field reflected BSDEs with jumps

3 Weakly interacting nonlinear Snell envelopes

4) Convergence of the particle system and propagation of chaos

Roxana Dumitrescu (King's College)

Propagation of chaos MF-RBSDEs

1 July 2022 29 / 46

< □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Framework

For a given vector x := (x¹,...,xⁿ) ∈ ℝⁿ, denote the empirical measure associated to x by

$$L_n[\mathbf{x}] := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\mathbf{x}^k};$$

- Given $n \in \mathbb{N}$, let $\{B^i\}_{1 \le i \le n}$, $\{\tilde{N}^i\}_{1 \le i \le n}$ be independent copies of B and \tilde{N} ;
- Let $\mathbb{F}^n := \{\mathcal{F}^n_t\}_{t \in [0,T]}$ be the completion of the filtration generated by $\{B^i\}_{1 \le i \le n}$ and $\{\tilde{N}^i\}_{1 \le i \le n}$.

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Particle system

• Consider a family of weakly interacting processes $\mathbf{Y}^n := (Y^{1,n}, \dots, Y^{n,n})$ evolving backward in time as follows: for $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{cases} Y_{t}^{i,n} = \xi^{i,n} + \int_{t}^{T} f(s, Y_{s}^{i,n}, Z_{s}^{i,i,n}, U_{s}^{i,i,n}, L_{n}[\mathbf{Y}_{s}^{n}]) ds + K_{T}^{i,n} - K_{t}^{i,n} \\ - \int_{t}^{T} \sum_{j=1}^{n} Z_{s}^{i,j,n} dB_{s}^{j} - \int_{t}^{T} \int_{R^{*}} \sum_{j=1}^{n} U_{s}^{i,j,n}(e) \tilde{N}^{j}(ds, de); \\ Y_{t}^{i,n} \ge h(t, Y_{t}^{i,n}, L_{n}[\mathbf{Y}_{t}^{n}]); \\ \int_{0}^{T} (Y_{t^{-}}^{i,n} - h(t^{-}, Y_{t^{-}}^{i,n}, L_{n}[\mathbf{Y}_{t^{-}}^{n}])) dK_{t}^{i,n} = 0. \end{cases}$$

$$(10)$$

Remark: Note that if $(\xi^{1,n}, \ldots, \xi^{n,n})$ is exchangeable, then $(\mathbf{Y}^n, \mathbf{Z}^n, \mathbf{U}^n, \mathbf{K}^n)$ is exchangeable.

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ □ ののの

Assumptions

We assume that

f and h are deterministic functions of (t, y, z, u, μ) and (t, y, μ), respectively.

•
$$\xi^{i,n} \in L^p(\mathcal{F}^n_T), \quad i=1,\ldots,n.$$

• $\xi^{i,n} \ge h(T,\xi^{i,n},L_n[\xi^n])$ a.s. i = 1, ..., n.

Remark: The results are valid for more general f and g, e.g. $f(t, \omega, y, z, \mu) := \hat{f}(t, (B_s(\omega), \tilde{N}_s(\omega))_{0 \le s \le t}, y, z, \mu)$ and $h(t, \omega, y, \mu) := \hat{h}(t, (B_s(\omega), \tilde{N}_s(\omega))_{0 \le s \le t}, y, \mu)$, with \hat{f} and \hat{h} measurable and Lipschitz w.r.t. y, μ .

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Wellposedness of the particle system

Theorem

Suppose that Assumptions are in force for some $p \ge 2$. Suppose further that γ_1 and γ_2 satisfy (6) i.e.

$$\gamma_1^{p} + \gamma_2^{p} < 2^{2 - \frac{3p}{2}}.$$

Then the system of nonlinear weakly interacting Snell envelopes (10) has a unique solution in $S^{p,\otimes n} \otimes \mathcal{H}^{p,n\otimes n} \otimes \mathcal{H}^{p,n\otimes n}_{\nu} \otimes \mathcal{S}^{p,\otimes n}_{i}$.

Outline



2 Mean-field reflected BSDEs with jumps

3 Weakly interacting nonlinear Snell envelopes



Convergence of the particle system and propagation of chaos

A (10) N (10) N (10)

- The theory of propagation of chaos initiated by Kac with the purpose of investigating particle system approximations of some nonlocal PDEs
- Main idea: Consider a large number of *n* of particles. If the interaction between the particles is *sufficiently weak* and the particles are *symmetric*, then as the size of the system increases, there is less and less interaction and in the limit the particles 'become independent'.
- References: e.g. McKean, Sznitman, Gartner. Further developments and applications: e.g. Jabin, Lacker, Shkolnikov, Briand et al.
- Propagation of chaos for interacting backward particles: Buckdahn et al, Hu et al., Laurière and Tangpi, Briand et al.

イロト 不得 トイヨト イヨト

Assumptions

- (i) The sequence $\xi^n = (\xi^{1,n}, \xi^{2,n}, \dots, \xi^{n,n})$ is exchangeable i.e. the sequence of probability laws μ^n of ξ^n on \mathbb{R}^n is symmetric.
- (ii) For each $i \ge 1$, $\xi^{i,n}$ converges in L^p to ξ^i , i.e.

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[|\xi^{i,n}-\xi^i|^p]=0,$$

where the random variables $\xi^i \in L^p(\mathcal{F}_T^i)$ are independent and equally distributed (iid) with probability law μ .

(iii) $h(t, y, \mu) = \xi_t + h_1(y, \mu)$, with $\xi \in S^p$ and l.u.s.c. along stopping times and h_1 Lipschitz bounded.

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ □ ののの

Framework

• Consider the (Polish) Skorohod space $(\mathbb{D} := D([0, T], d^0))$, with

$$d^{o}(x,y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ ||\lambda||^{o} \lor \sup_{0 \le t \le T} |x(t) - y(\lambda(t))| \},$$

where Λ is the space of increasing bijections from $[0,\, \mathcal{T}]$ into itself. $\bullet\,$ Set

 $\mathbb{H}^{2,n}:=L^2([0,T],\mathbb{R}^n,dt), \ \mathbb{H}^{2,n}_\nu:=L^2([0,T]\times\mathbb{R}^*,\mathbb{R}^n,dt\otimes d\nu).$

• Consider the product space $G:=\mathbb{D}\times\mathbb{H}^{2,n}\times\mathbb{H}^{2,n}_{\nu}\times\mathbb{D}$ endowed with the product metric

$$\delta((y, z, u, k), (y', z', u', k')) := \left(d^{o}(y, y')^{p} + ||z - z'||_{\mathbb{H}^{2,n}}^{p} + ||u - u'||_{\mathbb{H}^{2,n}}^{p} + d^{o}(k, k')^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1 July 2022 37 / 46

Framework

• Define the Wasserstein metric on $\mathcal{P}_{p}(G)$ by

$$D_G(P,Q) = \inf \left\{ \left(\int_{G \times G} \delta((y,z,u,k),(y',z',u',k'))^p R(dx,dy) \right)^{1/p} \right\},\$$

over $R \in \mathcal{P}(G \times G)$ with marginals P and Q. Since (G, δ) is a Polish space, $(\mathcal{P}_p(G), D_G)$ is a Polish space and induces the topology of weak convergence

Roxana Dumitrescu (King's College)

Propagation of chaos MF-RBSDEs

1 July 2022 38 / 46

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Theorem (Convergence result I)

Assume that, for some p > 2, γ_1 and γ_2 satisfy

$$2^{\frac{5p}{2}-2}(\gamma_1^p+\gamma_2^p) < \left(\frac{p-\kappa}{2p}\right)^{p/\kappa}$$

for some $\kappa \in [2, p)$. Then, under the above assumptions, we have

$$\lim_{n \to \infty} \left(\|Y^{i,n} - Y^{i}\|_{\mathcal{S}^{p}} + \|Z^{i,n} - Z^{i}\boldsymbol{e}_{i}\|_{\mathcal{H}^{p,n}} + \|U^{i,n} - U^{i}\boldsymbol{e}_{i}\|_{\mathcal{H}^{p,n}_{\nu}} + \|K^{i,n} - K^{i,n}\|_{\mathcal{H}^{p,n}_{\nu}} + \|W^{i,n} - W^{i,n}\|_{\mathcal{H}^{p,n}_{\nu}} + \|W^$$

Roxana Dumitrescu (King's College)

Propagation of chaos MF-RBSDEs

1 July 2022 39 / 46

▲ □ ▶ ▲ □ ▶ ▲ □ ▶

Theorem (Propagation of chaos result I)

Under the assumptions of the previous theorem, the particle system (10) satisfies the propagation of chaos property, i.e. for any fixed positive integer k,

$$\lim_{n\to\infty} Law(\Theta^{1,n},\Theta^{2,n},\ldots,\Theta^{k,n}) = Law(\Theta^1,\Theta^2,\ldots,\Theta^k).$$

For any fixed $1 \le k \le n$, $\Theta^{i,n} := (Y^{i,n}, Z^{i,n}, U^{i,n}, K^{i,n})$, i = 1, ..., k and $\Theta^i := (Y^i, Z^i, U^i, K^i)$, i = 1, ..., k, with independent terminal values $Y_T^i = \xi^i$, i = 1, ..., k, are independent copies of $\Theta := (Y, Z, U, K)$.

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

The proof of the propagation of chaos property follows from the inequalities

$$D_{G}^{p}(\mathbb{P}^{k,n},\mathbb{P}_{\Theta}^{\otimes k}) \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\|Y^{i,n} - Y^{i}\|_{\mathcal{S}^{p}}^{p} + \|Z^{i,n} - Z^{i}\mathbf{e}_{i}\|_{\mathcal{H}^{p,n}}^{p} + \|U^{i,n} - U^{i}\mathbf{e}_{i}\|_{\mathcal{H}^{p}_{\nu}}^{p} \right)$$

where for each i = 1, ..., n, $\mathbf{e}_i := (0, ..., 0, \underbrace{1}_i, 0, ..., 0)$.

Roxana Dumitrescu (King's College)

Propagation of chaos MF-RBSDEs

1 July 2022 41 / 46

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Theorem (Convergence result II)

Assume that for some $p \ge 2$, γ_1 and γ_2 satisfy

$$2^{\frac{5p}{2}-2}(\gamma_1^p+\gamma_2^p)<1.$$

Then, under the above Assumptions, we have

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T}E[|Y_t^{i,n}-Y_t^i|^p]=0.$$

In particular,

$$\lim_{n\to\infty}\|Y^{i,n}-Y^i\|_{\mathcal{H}^{p,1}}=0.$$

Roxana Dumitrescu (King's College)

1 July 2022 42 / 46

Theorem (Propagation of chaos result II)

Under the assumptions of previous Theorem, the solution $Y^{i,n}$ of the particle system (10) satisfies the propagation of chaos property, i.e. for any fixed positive integer k,

$$\lim_{n\to\infty} Law(Y^{1,n},Y^{2,n},\ldots,Y^{k,n}) = Law(Y^1,Y^2,\ldots,Y^k).$$

- 4 回 ト 4 三 ト 4 三 ト

An *ingredient* of the proof is the following convergence result:

Theorem (Law of Large Numbers)

Let Y^1, Y^2, \ldots, Y^n with terminal values $Y_T^i = \xi^i$ be independent copies of the solution Y of (5). Then, we have

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mathcal{W}_{\rho}^{p}(L_{n}[\boldsymbol{Y}_{t}],\mathbb{P}_{Y_{t}})\right]=0.$$

Roxana Dumitrescu (King's College)

1 July 2022 44 / 46

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Related works

- Preprint: R.D., B. Djehiche, Zero-sum mean-field Dynkin games: characterization and convergence, February 2022
- Work in progress: R.D., B. Djehiche, I. Kharroubi, H. Pham, Viscosity solutions for an extended class of variational inequalities on the Wasserstein space

イロト 不得 ト イヨト イヨト

Thank you for your attention!

Roxana Dumitrescu (King's College)

Propagation of chaos MF-RBSDEs

1 July 2022 46 / 46

• • = • • = •